

20. Vektorové prostory

Osnova: zobecněný rovnoběžník, operace sčítání a vnější násobení na množině všech orientovaných úseček, grupa, komutativní grupa;

definice vektorového prostoru, vektorový prostor vázaných vektorů, volných vektorů, aritmetický VP;

ekvipolence, ekvivalence, vázaný vektor, volný vektor, operace sčítání a vnější násobení na množině volných vektorů, umístění vektoru, reprezentant vektoru;

podprostor VP, lineární kombinace, lineární závislost a nezávislost vektorů, podprostor generovaný množinou, systém generátorů, báze a dimenze VP;

izomorfnní zobrazení, izomorfismus VP, afinní a kartézská soustava souřadnic, souřadnice vektoru a bodu, velikost vektoru;

skalární součin, vektory ortogonální a ortonormální, Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces; vektorový součin, smíšený součin vektorů

SÚM 222/15, 16, 32, 36, 37, 38, 41a(b), 42(a)b (bez rýsování), 44, 46, 48a, 52, 55ac

SMP 43/1, 2, 4, (5), 6

1) Vektory u, v svírají úhel $\alpha = \frac{\pi}{6}$, přitom $|u| = \sqrt{3}$, $|v| = 1$. Určete úhel vektorů $a = u + v$, $b = u - v$.

$[41^0]$

2) Určete úhel vektorů u, v , víte-li, že $|u| = 5$, $|v| = 8$ a $|u - v| = 7$.

$[60^0]$

4) Pro jednotkové vektory x, y, z platí $x + y + z = o$. Určete číslo $A = x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z$.

$[-1,5]$

5) Vektory x, y, z mají tyto vlastnosti: $|x| = 3$, $|y| = 1$, $|z| = 4$, $x + y + z = o$. Určete číslo

$$B = x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z.$$

$[-13]$

6) Úhel vektorů u, v je $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, přitom $|u| = 3$, $|v| = 4$. Vypočítejte: a) $(u + v)^2$, b) $|u - v|^2$, c) $|3u + 2v|^2$.

$[13;37;73]$

1. Dokažte, že množina V je podprostorem $R^{(5)}$ a určete jeho dimenzi:

$$a) V = \{[x_1, x_2, 0, x_1, x_2]; x_1, x_2 \in R\}$$

$$(b) V = \{[x_1, x_1, x_2, x_2, 0]; x_1, x_2 \in R\}$$

$[2;2]$

2*. Dokažte, že vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ tvoří bázi prostoru $R^{(4)}$. Vyjádřete v této bázi souřadnice vektorů $\vec{x}, \vec{y}$.

$$a^*) \vec{e}_1 (1,1,1,1), \vec{e}_2 (1,2,1,1), \vec{e}_3 (1,1,2,1), \vec{e}_4 (1,3,2,3), \vec{x} (1,0,1,0), \vec{y} (2,3,4,5)$$

$$(b) \vec{e}_1 (2,3,0,-1), \vec{e}_2 (1,2,1,4), \vec{e}_3 (1,2,-1,-2), \vec{e}_4 (1,3,-1,0), \vec{x} (1,1,1,1), \vec{y} (1,0,0,0)$$

$[(1;0;0,5;-0,5), (2;-2;0,5;1,5); (1;0;-1;0), (-3;3,5;8,5;-5)]$

3. Je dána krychle $ABCDEFGH$, v ní vektory $\vec{a} = \vec{AC}, \vec{b} = \vec{AD}, \vec{c} = \vec{AH}$. Vyjádřete vektory $\vec{x} = \vec{XY}, \vec{y} = \vec{GY}$, kde X je střed bodů E, F a Y bodů B, F , jako lineární kombinace vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$$[(0,5;0;-0,5), (0;-0,5;-0,5)]$$

4*. Určete i) ortogonální bázi, která není ortonormální, ii) ortonormální bázi podprostoru generovaného vektory:

$$a) \vec{u} = (2,1,3), \vec{v} = (4,2,0) \quad b*) \vec{u}(0,1,0,0,0), \vec{v}(1,1,1,2,1), \vec{w}(1,1,0,-1,0).$$

$$[i)(2;1;3), (6;3;-5); (0;1;0;0;0), (1;0;1;2;1), (8;0;1;-5;1); ii) delit velikostí]$$

Binomická věta

SÚM 283/90a(b), 103, 106, 107, (109), 110, (115), 116, 118, 119, 120a